2.8.20 Pythagorova věta II

Předpoklady: 020819, 020818

Pedagogická poznámka: První část hodiny obsahuje opakování mocnin, na které není v minulé hodině místo.

Př. 1: Vypočti.

a) 2^{-2} b) 10^{-3} c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ d) $\sqrt{25}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

a) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ b) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{25}}=25$

d) $\sqrt{25}=5$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$

Dodatek: Samozřejmě v některých bodech je možné postupovat s využitím postřehů z minulých hodin i rychleji:
c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5^2=25$ nebo e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Př. 2: Zapiš čísla v exponenciálním tvaru.
a) 1200 b) 0,0058 c) 347 000 d) 0,000 708

a) $1200=1{,}2\cdot10^3$ b) $0{,}0058=5{,}8\cdot10^{-3}$

c) $347\,000=3{,}47\cdot10^5$ d) $0{,}000\,708=7{,}08\cdot10^{-4}$

Př. 3: Čísla v exponenciálním tvaru zapiš běžným způsobem.
a) $9\cdot10^{-4}$ b) $1{,}6\cdot10^3$ c) $2{,}07\cdot10^{-6}$ d) $6{,}3\cdot10^9$
Předpokládej, že uvedené hodnoty představují hmotnost v kilogramech. O jaké předměty by mohlo jít?

a) $9\cdot10^{-4}$ kg $=0{,}0009$ kg $=0{,}9$ g - hmotnost lehké mince (bývalá mince 50 ha, větší představitelé hmyzu, větší kapka vody, tabletky, ….)

b) $1{,}6\cdot10^3$ kg $=1600$ kg $=1{,}6$ t - středně velký osobní automobil

c) $2{,}07\cdot10^{-6}$ kg $=0{,}000\,00207$ kg $=2{,}07$ μg - komár nebo jiný menší druh hmyzu, množství účinné látky v jedné tabletce léku

d) $6{,}3\cdot 10^9$ kg $= 6\,300\,000\,000$ kg $= 6\,300\,000$ t - Cheopsova pyramida, menší hora

Př. 4: Vypočti. Výsledek uveď jako desetinné číslo nebo zlomek.

a) 2^2+2^{-2} b) $3^3\cdot 3^{-2}$ c) $2^4\cdot 4^2$ d) $\sqrt{4^3}$

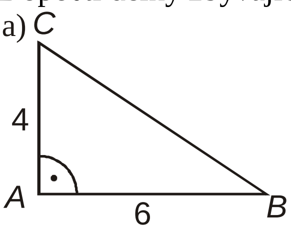
a) $2^2+2^{-2}=4+\dfrac{1}{2^2}=4+\dfrac{1}{4}=4{,}25=\dfrac{17}{4}$

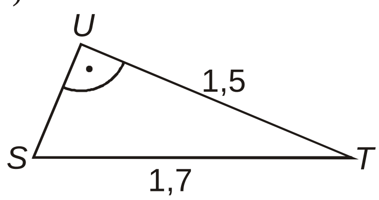
b) $3^3\cdot 3^{-2}=\dfrac{3^3}{3^2}=3^1=3$

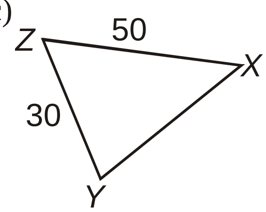
c) $2^4\cdot 4^2=16\cdot 16=256$

d) $\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$

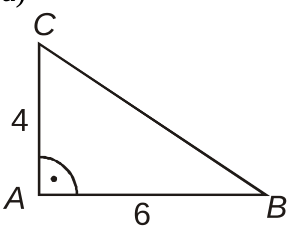
Př. 5: Dopočti délky zbývajících stran pravoúhlých trojúhelníků na obrázku.

a) 

b) 

c) 

a)

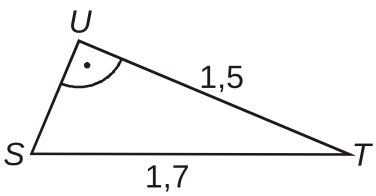


Platí: $a^2=b^2+c^2$ (strana a je přepona)

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$

$a=\sqrt{52}=\sqrt{4\cdot 13}=2\sqrt{13}\doteq 7{,}21$

b)



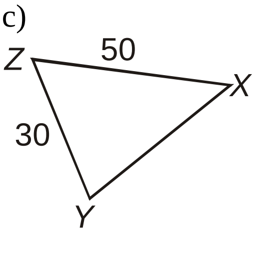
Platí: $u^2=s^2+t^2$ (strana u je přepona)

$t^2=u^2-s^2 \quad /\sqrt{}$

$t=\sqrt{u^2-s^2}=\sqrt{1{,}7^2-1{,}5^2}=\sqrt{0{,}64}$

$t=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$

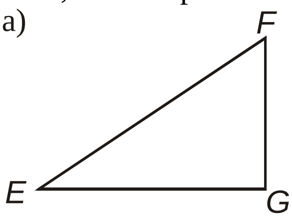
c)



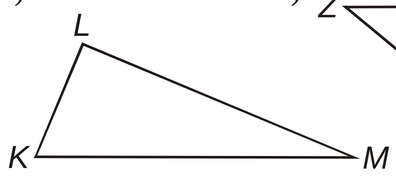
Trojúhelník na obrázku není pravoúhlý (nemá vyznačený pravý a úhel a žádný úhel se nezdá pravý) $\Rightarrow$ pro výpočet zbývající strany nemůžeme použít Pythagorovu větu (a to znamená, že bez dalších informací nejsme schopni délku třetí strany určit).

Př. 6: Zapiš Pythagorovu větu pro pravoúhlé trojúhelníky na obrázku (používej označení stran, které odpovídá označení vrcholů).

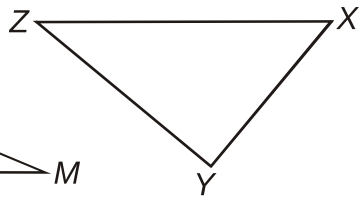
a)



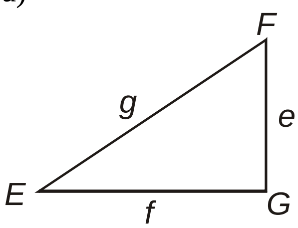
b)



c)

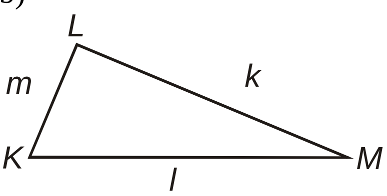


a)



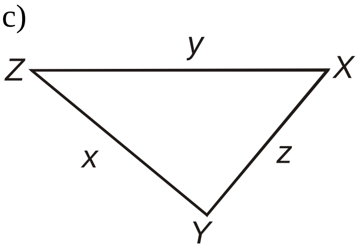
Přeponou je strana g: $g^2 = e^2 + f^2$.

b)



Přeponou je strana l: $l^2 = k^2 + m^2$.

c)

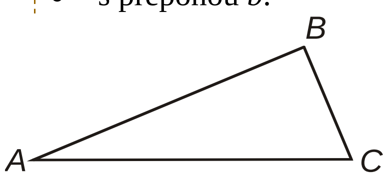


Přeponou je strana y: $y^2 = x^2 + z^2$.

Př. 7: Nakresli libovolný trojúhelník ABC, pro který platí: $b^2 = a^2 + c^2$.

Trojúhelník, který nakreslíme musí být:

- pravoúhlý (platí pro něj Pythagorovo věta),
- s přeponou b.



Př. 8: Urči délky stran rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky $6\sqrt{2}$.

Rovnoramenný trojúhelník má obě odvěsny (ramena) stejné ($a = b$).

$a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = c^2$

$2a^2 = c^2 \qquad / : 2$

$a^2 = \frac{c^2}{2} \qquad / \sqrt{\ }$

$a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$

Odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou délky $6\sqrt{2}$ mají délku 6.

Př. 9: Dvě strany trojúhelníku mají délky 15 cm a 17 cm. Urči délku poslední strany tak, aby trojúhelník byl pravoúhlý.

Dvě možnosti:
- strana o délce 17 cm je přeponou trojúhelníku $\Rightarrow$ určujeme druhou odvěsnu,
- strana o délce 17 cm je odvěsnou trojúhelníku $\Rightarrow$ určujeme přeponu.

Strana o délce 17 cm je přeponou trojúhelníku $\Rightarrow$ určujeme druhou odvěsnu.

$a^2 + b^2 = c^2 \qquad / -b^2$

$a^2 = c^2 - b^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}\ \text{cm} = \sqrt{64}\ \text{cm} = 8\ \text{cm}$

Strana o délce 17 cm je odvěsnou trojúhelníku $\Rightarrow$ určujeme přeponu.

$a^2 + b^2 = c^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 17^2}\ \text{cm} = \sqrt{514}\ \text{cm} \doteq 22{,}7\ \text{cm}$

Třetí strana trojúhelníku může mít velikost buď 8 cm nebo 22,7 cm.

Př. 10: Trojúhelník o délkách stran 3, 4, 5 je pravoúhlý s celočíselnými stranami. Existuje rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami? Svůj závěr zdůvodni.

Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s celočíselnými stranami neexistuje. Všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky mají stejný tvar (dva úhly $45°$ a jeden úhel $90°$) $\Rightarrow$ všechny jsou zvětšené nebo zmenšené obrazy pravoúhlého trojúhelníku o stranách $1; 1; \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ žádný z nich nemůže mít celočíselné strany (trojúhelník o stranách $1; 1; \sqrt{2}$ má neceločíselnou přeponu, při zvětšení nebo zmenšení trojúhelníku se délky všech stran vynásobí stejným číslem $\Rightarrow$ délku přepony $\sqrt{2}$ bychom museli vynásobit násobkem čísla $\sqrt{2}$, pokud tímto číslem vynásobíme délky ostatních stran budou obsahovat $\sqrt{2}$ a budou tedy neceločíselné).
Dalším příkladem rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku je trojúhelník z příkladu 8 o stranách $6; 6; 6\sqrt{2}$ (tedy šestkrát zvětšený trojúhelník o stranách $1; 1; \sqrt{2}$).

Př. 11: Dobrovolný domácí úkol: najdi si libovolný důkaz Pythagorovy věty a připrav si jeho předvedení na následující hodinu.

Shrnutí: Pythagorovu větu můžeme zapsat pomocí různých písmenek. Zda je správný tvar $a^2 + b^2 = c^2$ nebo $a^2 + c^2 = b^2$ záleží na označení stran.